Академия наук Украинской ССР
Институт теоретической физики

ИТФ-78-162Р
январь 1979

В.И.Гороховский

ВАРИАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ

Киев - 1979

В.И.Гороховский ИТФ-78-162Р

Вариационная теория криволинейной электрической дуги

Модифицированный вариационный принцип Пригожина-Гланедорфа используется для расчета прямыми методами тепловых и электрических характеристик, а также геометрических параметров электрических дуг сложной формы.

Препринт Института теоретической физики АН УССР

Киев 1979

V.I.Gorokhovsky ИТФ-78-162Р

Variational Theory of Curvilinear Electric Arc

The Prigozhin-Glanedorf modified variational principle is used to calculate by the direct methods the thermal and electric characteristics and also the geometrical parameters of electric arcs of a complex form.

Preprint of the Institute for Theoretical Physics Academy of Sciences of the Ukrainian SSR

Kiev 1979

Академия наук Украинской ССР
Институт теоретической физики

Препринт
ИТФ-78-162Р

В.И.Гороховский*

ВАРИАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ

*Ин-т сверхтвердых материалов АН УССР

Киев - 1979

В.И.Гороховский

Вариационная теория криволинейной электрической дуги

Модифицированный вариационный принцип Пригожина-Гланедорфа используется для расчета прямыми методами тепловых и электрических характеристик, а также геометрических параметров электрических дуг сложной формы.

The Prigozhin-Glanedorf modified variational principle is used to calculate by the direct methods the thermal and electric characteristics and also the geometrical parameters of electric arcs of a complex form.

Variational Theory of Curvilinear Electric Arc

V.I.Gorokhovsky

I. ВВЕДЕНИЕ

Явления, возникающие при деформации электрической дуги, вызванной естественной или вынужденной конвекцией, все еще недостаточно изучены как теоретически, так и экспериментально. Трудности теоретического исследования связаны с исключительной сложностью уравнений динамики термической плазмы [I] в случае криволинейных электрических дуг. Поэтому представляет интерес рассмотрение простых, но достаточно общих моделей, позволяющих выяснить влияние различных факторов на характеристики криволинейных дуг.

В настоящее время наиболее полное описание электрических дуг сложной формы получено в рамках модели движущейся дуги Меккера [2] . В модели Меккера предполагается, что движение электрической дуги складывается из "скольжения" теплового облака относительно среды, вызванного неоднородностью нагрева и теплоотвода, и магнитогидродинамического движения проводящего канала дуги. При этом абсолютная скорость изотермы максимальной температуры

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{TC} + \vec{V}_{MГD}, \qquad (I)$$

где $\vec{V}_{TC}$ - скорость теплового скольжения, определяемая из уравнения баланса энергии дуги без учета конвективного теплопереноса; $\vec{V}_{MГD}$ - скорость проводящего газа, получаемая из решения магнитогидродинамической задачи.

Таким образом, задача расчета криволинейной дуги распадается на две, в некотором смысле независимые подзадачи: расчет распределения температуры в дуге из баланса энергии и определение скорости массопереноса из решения МГД-задачи. Если решения МГД-задачи в ряде случаев известны и могут быть приложены к расчету криволинейной дуги, то решение тепловой задачи представляет большие трудности.

Целью данной работы является получение достаточно простых расчетных соотношений, связывающих наиболее важные характеристики электродуговых устройств, такие как напряженность электрического поля, максимальная температура, скорость движения дуги, радиус проводящей зоны и другие с силой тока, геометрией разряда, родом газа.

2. БАЛАНС ЭНЕРГИИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ДУГИ

Без учета конвекции уравнение баланса энергии электрической дуги в цилиндрическом канале можно записать в виде [I] :

$$\frac{\rho C_P}{\lambda}\frac{\partial S}{\partial t} = \vec{E}^2\sigma(S) - \varepsilon(S) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}, \tag{2}$$

где $S = \int\limits^T \lambda dT$ – "функция теплопроводности"; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля дуги; $\sigma(S)$, $\varepsilon(S)$ – соответственно электропроводность и плотность лучистого потока в приближении оптически тонкого слоя; ρ – плотность; C_P – теплоемкость; λ – теплопроводность плазмы. Плотность тока $\vec{j}$ удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$div\,\vec{j} = 0. \tag{3}$$

Электропроводность, напряженность электрического поля и плотность тока дуги связаны законом Ома:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}. \tag{4}$$

Аксиальная составляющая напряженности поля $\vec{E}$ удовлетворяет интегральному закону Ома:

$$I = E_z\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R_w}\sigma(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta, \tag{5}$$

где I – сила тока дуги, R_w – радиус канала.

В дальнейшем мы будем рассматривать каналовую модель дуги с кусочно-линейной зависимостью электропроводности σ от "функции теплопроводности" S :

$$\sigma(S) = \begin{cases} B(S-S_*) & \text{при} \quad S \geq S_* \\ 0 & \text{при} \quad S < S_* \end{cases} \tag{6}$$

где S_* – значение "функции теплопроводности", соответствующее границе проводящей зоны.

Задавая связь между плотностью и энтальпией плазмы в виде $\bar{\rho} = \bar{h}^{-1}$, где $\bar{\rho} = \rho/\rho_w$, $\bar{h} = h/h_w$. Преобразуем коэффициент при $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ в уравнении (2) к виду

$$\frac{\rho C_P}{\lambda} = \left[\frac{\rho_w h_w \left(\frac{d\ln h}{d\ln S}\right)_P}{S_* - S_w}\right]\frac{1}{v + 1 + \delta},$$

где

$$v = \frac{S - S_*}{S_* - S_w}, \qquad \delta = \frac{S_w}{S_* - S_w} \ll 1.$$

В достаточно широком интервале температур $h(T)$ и $S(T)$ можно аппроксимировать зависимостью, близкой к степенной. Тогда $\left(\frac{d\ln h}{d\ln S}\right)_P$ – слабо меняющаяся величина, порядка единицы. Запишем уравнение баланса энергии (2) без учета излучения в безразмерном виде. Учитывая (7), получим:

$$\frac{1}{\upsilon+1+з}\frac{\partial U}{\partial \tau} = \bar{E}^2 U + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \quad (8а)$$

при $0 \le \rho \le \rho_*$,

$$\frac{1}{\upsilon+1+з}\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \quad (8б)$$

при $\rho_* < \rho \le 1$, где $\tau = \frac{t}{t_g}$, $t_g = \frac{S_w h_w R_w^2 \left(\frac{d\ln h}{d\ln S}\right)_p}{S_* - S_w}$,

$\rho = \frac{r}{R_w}$, $\xi = \frac{z}{R_w}$, $\bar{E} = E R_w \sqrt{B}$

Закон Ома (5) принимает вид:

$$\bar{I} = \bar{E}_z \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_*} U \rho \, d\rho \, d\theta, \quad (9)$$

где $\bar{I} = \frac{I}{R_w\sqrt{B}\,(S_* - S_w)}$.

3. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Вариационный метод основан на существовании вариационного принципа, соответствующего данной системе уравнений. Вариационный принцип утверждает, что пробная функция U, содержащая некоторое число неопределенных коэффициентов C_i, обращает вариацию функционала $L(\tilde{U})$ в нуль тогда и только тогда, когда $\tilde{U} = U$, где U – решение данной системы уравнений.

В приближении сплошной среды течение термической плазмы описывается полями векторных и скалярных величин: электромагнитного поля, поля скоростей, давлений, температур и т.п.,

которые подчиняются дифференциальным уравнениям баланса энергии, импульса, массы электрического тока и уравнениям Максвелла [I]. Для осесимметричных течений можно построить приближенный вариационный функционал, стационарное значение которого осуществляется на соответствующих приближенных решениях системы уравнений термической плазмы. Таким функционалом будет величина обобщенного производства энтропии или локальный потенциал системы [8].

Применение метода локального потенциала к расчету течений термической плазмы рассмотрено в [6]. В ряде частых задач локальный потенциал системы может быть уточнен за счет точного учета некоторых членов в уравнениях баланса.

Для уравнения баланса энергии можно записать лагранжев функционал с помощью вариационного метода, разработанного в приложении к задачам тепломассопереноса в [4] и примененным к расчету электрических дуг в [5,6].

Легко проверить, что функционал "действия", соответствующий уравнению (2), может быть записан в виде:

$$L_s = \left(\lim_{\tau_0 \to 0}\right) \int_{t_1}^{t_2} e^{t/\tau_0} dt \left\{ \int_{z_1}^{z_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R_w} \left[\bar{E}^2 \int_0^S \sigma(S)\,dS - \int_0^S \varepsilon(S)\,dS - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + \frac{\rho c_p}{\lambda}\cdot\frac{\tau_0}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 \right] r\,dr\,d\theta\,dz \right. \quad (10)$$

Если после написания уравнений Эйлера-Лагранжа для вариационного интеграла (10) перейти к пределу $\tau_0 \to 0$, то мы получим уравнение баланса энергии (2). Заметим, что величина $\bar{E}$ при этом не варьируется, а полученное уравнение баланса энергии решается совместно с законом Ома (3)-(5).

Для вариационной формулировки задачи о расчете распределения электрического поля по заданной электропроводности $\sigma(\vec{r})$ воспользуемся вариационным принципом, предложенным Ромпе и Вейцелем [7].

Рассмотрим вариационный интеграл

$$L_E = \int_{z_1}^{z_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R_w} \sigma(r,\theta)\left[\left(\frac{dV}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dV}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] r\,dr\,d\theta\,dz \qquad (II)$$

где V – потенциал электрического поля. Варьируя L_E по V и учитывая соотношение (4), можно показать, что уравнение неразрывности тока (8) является уравнением Эйлера-Лагранжа для интеграла (II).

С помощью метода локального потенциала легко объединить интегралы (IO),(II) в единый вариационный интеграл, уравнения Эйлера-Лагранжа которого дают уравнение баланса энергии и уравнение неразрывности тока. Заменяя компоненты $grad\,V$ соответствующими компонентами электрического поля и учитывая соотношение $E_r^2 + E_\theta^2 + E_z^2 = \vec{E}^2$, получим:

$$L_{SE} = \left(\lim_{\tau_0\to 0}\right)\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{z_1}^{z_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R_w}\left\{\left[(\overset{\circ}{\vec{E}})^2\int_0^S \sigma(S)\,dS - \int_0^S \varepsilon(S)\,dS - \right.\right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + \frac{S c_p}{\lambda}\frac{\tau_0}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right] + \qquad (I2)$$

$$\left.\left. + \sigma(\overset{\circ}{S})\vec{E}^2\right\} e^{\frac{t}{\tau_0}}\, r\,dr\,d\theta\,dz\right\} dt,$$

где в процессе варьирования величины с индексом "o" считаются фиксированными, а затем, после окончания варьирования учитывается дополнительное условие $\overset{\circ}{S} = S$, $\overset{\circ}{\vec{E}} = \vec{E}$ и т.д.

В заключение выпишем вариационный интеграл для каналовой модели дуги:

$$L_{SE} = \left(\lim_{\tau_0\to 0}\right)\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\xi_1}^{\xi_2} L_{SE}^{(\tau)}\, e^{\frac{\tau}{\tau_0}}\, d\tau, \qquad (I3a)$$

$$L_{SE}^{(\tau)} = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\rho_*}\frac{(\overset{\circ}{\vec{E}})^2 U^2}{2}\rho\,d\rho - \frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 - \frac{\tau_0}{U+1+s}\left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)^2\right]\rho\,d\rho + \qquad (I3б)$$

$$\left. + \int_0^{\rho_*}\overset{\circ}{U}(\vec{E})^2\rho\,d\rho\right\} d\theta.$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ДУГ ПРЯМЫМИ ВАРИАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

Для решения задачи (8) прямыми методами с использованием вариационного интеграла (I3), аппроксимируем функции $U(\rho,\theta,\xi,\tau)$, $\vec{E}(\rho,\theta,\xi,\tau)$ пробными функциями $U_k(U_m, \bar{a}, \psi, n_0, n_1, \ldots, n_k; \rho, \xi, \theta, \tau)$, $E_n(E_m, g_0, \ldots, g_n)$ где $U_m(\tau,\xi)$, $E_m(\tau,\xi)$ – значения U, E на изотерме максимальной температуры (оси криволинейной дуги), $\bar{a} = \frac{a}{R_w}$, a, $\psi(\tau,\xi)$ – соответственно радиальная и угловая цилиндрические координаты оси дуги, $n_0, n_1, \ldots, n_k, g_0, g_1, \ldots, g_n$ – формпараметры распределения U, E по сечению разрядной камеры[*].

После подстановки в $L_{SE}^{(\tau)}$ пробной функции и взятия интегралов по ρ и θ функционал $L_{SE}^{(\tau)}$ превращается в функцию

$$L_{SE} = L_{SE}(U_m, \bar{a}, \psi, n_0, n_1, \ldots, n_k, \dot{U}_m, \dot{\bar{a}}, \dot{\psi}, \dot{n}_0, \dot{n}_1, \ldots, \dot{n}_k, E_n, \overset{\circ}{g}_0, \ldots) \qquad (I3в)$$

Тогда система уравнений Эйлера-Лагранжа для функционала (I3б) с подынтегральной функцией (I3в), при условии, что величины с индексом (0) являются независимыми и неварьируемыми параметрами до окончания процесса варьирования, после предельного

[*] Заметим, что изотерма максимальной температуры, вообще говоря, не совпадает с линией центров распределения тока по сечению разрядной камеры.

перехода $\tau_0 \to 0$ принимает вид*/:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L_{SE}}{\partial \bar{a}} - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial L_{SE}}{\partial \bar{a}'_{\xi}} - \frac{\partial L_{SE}}{\partial \bar{a}_{\tau}} = 0 \\ &\frac{\partial L_{SE}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial L_{SE}}{\partial \psi'_{\xi}} - \frac{\partial L_{SE}}{\partial \psi_{\tau}} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14а)$$

$$\frac{\partial L_{SE}}{\partial U_m} - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial L_{SE}}{\partial U'_{m\xi}} - \frac{\partial L_{SE}}{\partial U_{m\tau}} = 0 \qquad (14б)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L_{SE}}{\partial n_0} - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial L_{SE}}{\partial n'_{0\xi}} - \frac{\partial L_{SE}}{\partial n_{0\tau}} = 0 \\ &\frac{\partial L_{SE}}{\partial n_1} - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial L_{SE}}{\partial n'_{1\xi}} - \frac{\partial L_{SE}}{\partial n_{1\tau}} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial L_{SE}}{\partial n_k} - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial L_{SE}}{\partial n'_{k\xi}} - \frac{\partial L_{SE}}{\partial n_{k\tau}} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (14в)$$

Присоединяя к системе (I4) уравнение (9), выражающее интегральный закон Ома, мы получим полную систему уравнений для определения параметров криволинейной дуги.

Рассмотрим два случая применения лагранжева вариационного метода для расчета деформированных электрических дуг в рамках модели Меккера движения дуги. Первый – простейший случай соответствует смещению дуги параллельно оси цилиндрической разрядной камеры под влиянием поперечного магнитного поля [2]

---

*/ В общем случае формфакторы $n_0, n_1, \ldots, n_k$ могут быть функциями от θ. В этом случае в уравнении Эйлера-Лагранжа добавляются члены вида $-\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial L_{SE}}{\partial n_{i\theta}}$.

В этом случае задача не зависит от ξ и ψ, и L_{SE} является функцией только U_m, отклонения оси дуги от оси канала $\bar{a}$, и формпараметров $n_0, n_1, \ldots, n_k$, а $\vec{E} = (0, 0, E_z)$ – определяется из закона Ома (9). Система (I4) принимает вид:

$$\frac{\partial L_{SE}}{\partial \bar{a}} - \frac{\partial L_{SE}}{\partial \bar{a}_{\tau}} = 0 \qquad (15а)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L_{SE}}{\partial U_m} - \frac{\partial L_{SE}}{\partial U_{m\tau}} = 0 \\ &\frac{\partial L_{SE}}{\partial n_0} - \frac{\partial L_{SE}}{\partial n_{0\tau}} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial L_{SE}}{\partial n_k} - \frac{\partial L_{SE}}{\partial n_{k\tau}} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (15б)$$

$$\bar{I} = \bar{E}_z \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_*} U\rho\, d\rho\, d\theta, \qquad (15в)$$

где $\bar{a} = \frac{a}{R_w}$. Разрешая системы (I5) относительно производных $\dot{\bar{a}}, \dot{U}_m, \dot{n}_0, \dot{n}_1, \ldots, \dot{n}_k$ (это возможно, так как функционал (I2) квадратичен по производным параметров $\bar{a}, U_m, n_0, n_1, \ldots, n_k$ по времени), получим следующую систему уравнений, определяющих динамику распределения температуры в поперечном сечении разряда. Учитывая, что $\bar{a}_{\tau} = V_{\tau c}$ – скорость "скольжения" теплового облака, получим:

$$V_{\tau c} = f_a(\bar{a}, U_m, n_0, n_1, \ldots n_k; \bar{E}_z) \qquad (16а)$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{U}_m = f_U(\bar{a}, U_m, n_0, n_1, \ldots n_k, \bar{E}_z) \\ &\dot{n}_0 = f_{n_0}(\bar{a}, U_m, n_0, n_1, \ldots n_k, \bar{E}_z) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\dot{n}_k = f_{n_k}(\bar{a}, U_m, n_0, n_1, \ldots n_k, \bar{E}_z) \end{aligned}\right\} \qquad (16б)$$

$$\bar{E}_z = f_2(\bar{a}, U_m, n_0, n_1, \ldots, n_k; I). \qquad (16в)$$

В стационарном состоянии скорость дуги относительно вещества $V_{г.с.}$ уравновешивается скоростью конвективного потока, вызванного силой Лоренца со стороны внешнего магнитного поля. Решение магнитогидродинамической задачи для дуги, отклоненной магнитным полем, было получено в [8,9]. На оси отклоненной дуги величина скорости проводящего газа

$$V_{мгд} = \frac{IB}{8\pi\rho}\left[\frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{(1-a^2)^2} - \ln\frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{(1-a^2)^2} - 1\right]. \qquad (17)$$

В соответствии с моделью Меккера в стационарном состоянии

$$V_{мгд} + V_{г.с.} = 0, \qquad (18)$$

где $V_{г.с.}$ определяется из уравнения (16а).

Уравнение (18) вместе с системой (16) дает возможность определить как величину отклонения дуги при различных магнитных полях и токах, так и все тепловые и электрические характеристики дуг в отклоненном положении.

Более сложный случай соответствует дуге, приобретающей форму винта в результате взаимодействия собственного или внешнего продольного магнитного поля с током дуги. В силу винтовой симметрии задачи вместо переменных θ, ξ можно ввести винтовые координаты $\tilde{\theta} = \theta + k\xi$, ξ, где $k = \frac{2\pi R_w}{\lambda_g}$, λ_g – шаг винта. При такой замене производная $\frac{\partial}{\partial\theta}$ переходит в $\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}}$, а $\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial\tau}$ в $\left(k\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}} + \frac{\partial}{\partial\xi}\right), \left(\omega\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}} + \frac{\partial}{\partial\tau}\right)$. При этом вариационный интеграл (13б) принимает вид:

$$L_{s\varepsilon} = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{l_*}\frac{(\overset{\circ}{\bar{E}})^2 U^2}{2}\,\eta\, d\eta - \frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)^2 + \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\partial U}{\partial\tilde{\theta}}\right)^2 +\right.\right.$$
$$+\left(k\frac{\partial U}{\partial\tilde{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial\xi}\right)^2 - \frac{\tau_0}{U+1+\vartheta}\left(\omega\frac{\partial U}{\partial\tilde{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial\tau}\right)^2\Big]\eta\, d\eta + \qquad (19)$$
$$\left.+\int_0^{l_*}\overset{\circ}{U}(\vec{E})^2\eta\, d\eta\right\} d\tilde{\theta},$$

где $\omega = \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tau}$.

При слабой зависимости свойств дуги от ξ и τ (на участке, близком к установившемуся) в $L_{s\varepsilon}$ можно опустить члены, пропорциональные производным $\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)^2$ и $\left(\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)^2$, так как при варьировании в уравнениях Эйлера-Лагранжа они дают поправки второго порядка малости. Тогда интеграл $L_{s\varepsilon}$ принимает вид

$$L_{s\varepsilon} = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{l_*}\frac{(\overset{\circ}{\bar{E}})^2 U^2}{2}\,\eta\, d\eta - \frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)^2 + \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\partial U}{\partial\tilde{\theta}}\right)^2 +\right.\right.$$
$$\left.+k^2\left(\frac{\partial U}{\partial\tilde{\theta}}\right)^2 - \frac{\tau_0\omega^2}{U+1+\vartheta}\left(\frac{\partial U}{\partial\tilde{\theta}}\right)^2\right]\eta\, d\eta + \left.\int_0^{l_*}\overset{\circ}{U}(\vec{E})^2\eta\, d\eta\right\} d\tilde{\theta}. \qquad (19а)$$

Подставляя "укороченное действие" (19а) в функционал (13а) и варьируя по фазе $\tilde{\theta}$, получим следующее дисперсионное соотношение для дуги, имеющей вид слабо расширяющегося винта:

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial\tilde{\theta}}\right)^2\eta\, d\eta\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial\tilde{\theta}}\right)^2\eta\, d\eta\, d\theta}. \qquad (20)$$

Из выражения (20) следует, что в рамках принятых допущений только вследствие неоднородности теплового поля винтовая дуга будет вращаться с частотой, пропорциональной углу расширения спирали. Причем при сужении и при расширении спирали дуга будет вращаться в разные стороны.

Как видим, данный результат получен без детализации формы распределения температуры в винтовой дуге. Тем не менее он согласуется с результатами экспериментального исследования винтовых дуг. Так, в работах [10,11] при исследовании слаботочных дуг без расхода газа в прямых разрядных трубках было обнаружено, что, начиная с некоторого, критического, значения тока, дуга принимает винтовую форму, однако вращения винта обнаружено не было. С другой стороны, в эксперименте [12] водородная дуга зажигалась в каскадной камере диаметром 5 мм, которая отделялась от электродов каскадными камерами диаметром 2 мм. При разрядном токе 25 А в средней каскадной камере дуга принимала винтовую форму, а в приэлектродных камерах оставалась прямой. При этом винт расширялся при переходе от приэлектродной к средней разрядной камере и вращался вокруг оси камеры.

5. ВЫБОР АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Для расчета характеристик криволинейной электрической дуги прямыми методами следует построить аппроксимирующий профиль "функции теплопроводности" $U(\rho,\theta,\xi)$, который принимает постоянное значение на стенке канала и имеет внутри канала максимум, смещенный на расстояние $\bar{a}$ от оси канала.

Чтобы построить систему функций, удовлетворяющих перечисленным условиям, рассмотрим конформное отображение единичного круга на единичный круг [19]. При этом точка $z=\rho e^{i\theta}$ z-плоскости переходит в точку $\omega=\frac{z-z_a}{z\bar{z}_a-1}$ плоскости ω, где $z_a=\bar{a}e^{i\varphi}$. Такое отображение переводит точку $z_a=\bar{a}e^{i\varphi}$ круга $|z|<1$ в центр круга $|\omega|<1$, а окружность $z=e^{i\theta}$ переходит в окружность $\omega=e^{i\alpha}$. Элементы системы функций I, z, z^2, ..., z^n, ... при конформном отображении единичного круга на единичный круг переходят в

соответствующие элементы системы функций I, ω, ω^2, ..., ω^n, ... Легко показать, что любая функция $U(z)$, аналитическая в круге $|z|<1$ при отображении $\omega=\omega(z)$ переходит в функцию $U[\omega(z)]$, аналитическую в круге $|\omega|<1$ и, наоборот, если функция $U(\omega)$ аналитична в круге $|\omega|<1$, то и функция $U(z)$, где $z=\omega^{-1}(z)$, также аналитична в круге $|z|<1$. Следовательно, наряду с системой функций

$$U_n(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j|z|^j, \tag{21}$$

использованной для осесимметричных дуг [6], для расчета криволинейных дуг может быть применена система функций вида

$$\tilde{U}_n(z)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j|\omega(z)|^j. \tag{22}$$

Учитывая граничные условия и требуя, чтобы максимум $\tilde{U}_n(z)$ находился в точке $z_a=\bar{a}e^{i\varphi}$, получим следующие выражения для первых двух пробных функций системы (22):

$$\tilde{U}_2(z)=(U_m+1)\left[1-|\omega(z)|^2\right]-1, \tag{23}$$

$$\tilde{U}_3(z)=(U_m+1)\left[1+c|\omega(z)|^2-(1+c)|\omega(z)|^3\right]-1. \tag{24}$$

В координатах ρ, θ с центром в точке максимума "функции теплопроводности" $U(\rho,\theta)$ имеем

$$|\omega(z)|=\frac{\rho}{\sqrt{(1-\bar{a}^2)\left[1-\bar{a}^2-\rho^2+2\bar{a}\rho\cos(\theta+\varphi)\right]+\rho^2}}. \tag{25}$$

Подставляя выражение (25) в (23), получаем следующее выражение для двухпараметрической пробной функции $U_2(U_m,\bar{a},\rho,\theta)$:

$$U_2=(U_m+1)\left[1-\frac{\rho^2}{(1-\bar{a}^2)\left[1-\bar{a}^2-\rho^2+2\bar{a}\rho\cos\theta\right]+\rho^2}\right]-1 \tag{26}$$

Аналогично (по формуле (22)) строятся многопараметрические пробные функции.

Используя выражение (26) из уравнения $U_z = 0$ можно найти границу проводящей зоны деформированной дуги

$$\rho_* = \frac{\rho_{o*}(1-\bar a^2)}{(1-\rho_{o*}\bar a^2)}\left[\bar a\cos\theta + \sqrt{\frac{1}{\rho_{o*}^2} - \bar a^2\sin^2\theta}\right], \qquad (27)$$

где $\rho_{o*} = \left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{\frac{1}{2}}$ – радиус границы проводящей зоны для прямой дуги, расположенной на оси канала. Подставляя профиль (26) в укороченное действие (I3б) в случае прямой дуги, отклоненной на расстояние $\bar a$ от оси канала, получим:

$$L^{(2)}_{SE2} = \int_0^{2\pi}\Big\{\int_0^{\rho_*}\frac{\bar E_z^2}{2}\Big[(U_m+1)\Big[1-\frac{\rho^2}{(1-\bar a^2)(1-\bar a^2-\rho^2+2\bar a\rho\cos\theta)+\rho^2}\Big]-1\Big]^2\rho\,d\rho - \frac{(U_m+1)^2}{2}\int_0^1\Big[\frac{2\rho(1-\bar a^2-\rho^2+2\bar a\rho\cos\theta) - \rho^2[(1-\bar a^2)(2\bar a\cos\theta-2\rho)+2\rho]}{(1-\bar a^2)(1-\bar a^2-\rho^2+2\bar a\rho\cos\theta)+\rho^2}\Big]^2\rho\,d\rho - \frac{(U_m+1)^2}{2}\int_0^1\bar a^2(1-\bar a^2)^2\times\frac{\rho^5\sin^2\theta}{[(1-\bar a^2)(1-\bar a^2-\rho^2+2\bar a\rho\cos\theta)+\rho^2]^4}\,d\rho\Big\}d\theta. \qquad (28)$$

В стационарном случае при заданном отклонении $\bar a$ оси дуги от оси канала система уравнений Эйлера–Лагранжа (I5а,б) сводится к одному уравнению

$$\frac{\partial L_{SE2}}{\partial U_m} = 0, \qquad (29)$$

которое определяет зависимость "функции теплопроводности" на оси дуги от силы тока $\bar I$ и величины отклонения оси дуги от оси канала $\bar a$. Выражение для электрического поля $\bar E_z$, вычисленное с помощью формулы (26) по формуле (I5в), принимает вид

$$I = \bar E_z\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_*}\Big\{(U_m+1)\Big[1-\frac{\rho^2}{(1-\bar a^2)(1-\bar a^2-\rho^2+2\bar a\rho\cos\theta)+\rho^2}\Big]-1\Big\}\rho\,d\rho\,d\theta \qquad (30)$$

Функции вида (2I) не являются единственными пробными функциями для вариационного расчета криволинейных дуг. В [5] для осесимметричной задачи была предложена пробная функция вида

$$U = (1+U_m)(1-\rho^n) - 1, \qquad (31)$$

где n – формпараметр, определяющий форму профиля "функции теплопроводности". Характеристики дуги, рассчитанные с помощью профиля (3I) лагранжевым вариационным методом, удовлетворительно согласуются с точным решением при значении $\bar I \approx 1$ [6]. Обобщая профиль (3I) на случай криволинейных дуг, рассмотрим пробную функцию

$$U = (1+U_m)\Big[1-\Big(\frac{\rho}{\rho_R}\Big)^n\Big] - 1, \qquad (32)$$

где $\rho_R = \bar a\cos\theta + \sqrt{1-\bar a^2\sin^2\theta}$.

Геометрически величина ρ_R представляет длину отрезка хорды единичного круга, проходящего под углом θ через точку с максимальной температурой и точку окружности $|Z| = 1$. Легко проверить, что функция (32) удовлетворяет граничным условиям задачи и имеет единственный максимум внутри канала при $\rho = 0$. Граница проводящей зоны для $U(\rho, \theta)$ вида (32) равна

$$\rho_* = \rho_{o*}\rho_R. \qquad (33)$$

Сравнивая (33) с выражением (27) для профиля (26) видим, что для "горячих" дуг с $U_m \gg 1$, что соответствует большим токам $\bar I \gg 1$, граница проводящей зоны в обоих случаях практически совпадает. Поэтому следует ожидать, что различия в характеристиках криволинейных дуг, вычисленных с помощью профилей (26) и (32), будут существенными также только при малых $\bar{I}$. Подставляя профиль (32) в интеграл (13) в случае прямой дуги, отклоненной на расстояние $\bar{a}$ от оси канала,и вычисляя соответствующие интегралы,получим

$$L_{SE} = \frac{n^2 \bar{E}_z^2 U_m^2}{4(n+1)(n+2)} \left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{\frac{2}{n}} - \frac{n}{4}(1+U_m)^2 (1+I_{2\theta}), \quad (34)$$

где

$$I_{2\theta} = \frac{\bar{a}^2}{2(1-\bar{a}^2)} + \frac{\bar{a}^4}{(1-\bar{a}^2)} \left[\frac{1}{2(1+\sqrt{1-\bar{a}^2})} - \frac{\sqrt{1-\bar{a}^2}}{(1+\sqrt{1-\bar{a}^2})^2} - \frac{1}{2(1-\bar{a}^2)}\right] + \frac{\bar{a}^6}{(1-\bar{a}^2)(1+\sqrt{1-\bar{a}^2})} \left[1 + \frac{\sqrt{1-\bar{a}^2}}{4(1+\sqrt{1-\bar{a}^2})^2} - \frac{1-\bar{a}^2}{2(1+\sqrt{1-\bar{a}^2})^2}\right]. \quad (35)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа для "действия" (34) имеют вид:

$$\frac{\partial L_{SE}}{\partial U_m} = \frac{n^2 \bar{E}_z^2 U_m}{(n+1)(n+2)} \cdot \left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{\frac{2}{n}} \left[1 + \frac{1}{n(1+U_m)}\right] - n(1+U_m)(1+I_{2\theta}) = 0, \quad (36а)$$

$$\frac{\partial L_{SE}}{\partial n} = \frac{\bar{E}_z^2 U_m^2}{(n+1)^2(n+2)^2} \left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{\frac{2}{n}} \left[3n^2 + 4n + 2(n+1)(n+2)\ln\left(\frac{1+U_m}{U_m}\right)\right] - (1+U_m)^2 (1+I_{2\theta}) = 0 \quad (36б)$$

Подставляя профиль (32) в закон Ома (15в), получим

$$\bar{I} = \bar{E}_z \left(\frac{n\pi}{n+2}\right) \left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{\frac{2}{n}} U_m . \quad (37)$$

Результаты численного расчета прямой отклоненной дуги с пробными функциями вида (23) и (24) показали, что максимальное отличие профилей U_2, U_3 при $\bar{I} \geq 5$ не превосходит 20%, убывая с ростом $\bar{I}$. Сравнение с расчетом, использующим профиль (32),показало, что максимальное отличие профилей U_n, U_2, U_3 при $\bar{I} \geq 5$ составляет 40% также убывая с ростом $\bar{I}$. При этом отличие между решением, использующим профиль (32) и точным аналитическим решением в осесимметричном случае (т.е. при $\bar{a} = 0$) не превосходит 30% при $\bar{I} \geq 1$ [6]. Отсюда можно заключить, что профиль (32) аппроксимирует решение тепловой задачи с приемлемой для инженерных расчетов точностью при значениях параметра $\bar{I} \geq 1$.

6. АППРОКСИМАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ДУГЕ

Для определения электрического поля в криволинейной дуге, следуя [14,15], рассмотрим локальную систему координат, начало которой находится на изотерме максимальной температуры (рис.1). Пусть координатная линия $\vec{x}$, направленная вдоль радиуса кривизны, $\vec{\tau}$ – вдоль изотермы максимальной температуры, а $\vec{\nu}$ – перпендикулярно плоскости кривизны. Тогда для τ-компоненты электрического поля $\vec{E}$ приближенно можно записать

$$\frac{\partial E_\tau}{\partial x} = \frac{E_{\tau m}}{1 + K_m x_0},$$

где R_m – радиус кривизны $\vec{E}$ -линий в начале координат. Отсюда находим

$$E_\tau = \frac{E_{\tau m}}{1 + K_m x},$$

где $K_m = \frac{1}{R_m}$ – кривизна $\vec{E}$ -линий.

В цилиндрической системе координат, начало которой находится на изотерме максимальной температуры с осью Z, параллельной оси канала и полярными координатами $\{r,\theta\}$, лежащими в плоскости поперечного сечения канала (рис.I), выражение для E_r принимает вид

$$E_r = \frac{E_{rm}}{1-K_m r_j},$$

где r_j - проекция радиус-вектора на направление радиуса кривизны изотермы максимальной температуры.

В случае винтовой дуги плоскость, поперечная оси разрядной камеры и плоскость, поперечная изотерме максимальной температуры, проведенные через одну и ту же точку на изотерме максимальной температуры, пересекаются по радиусу кривизны винтовой изотермы максимальной температуры, который, в свою очередь, пересекает под прямым углом ось разрядной камеры (рис.I). Выбирая также, как в профиле (32) в качестве начала отсчета полярного угла θ направление радиуса кривизны винтовой изотермы максимальной температуры и задавая её в цилиндрической системе координат с осью Z, совпадающей с осью канала, радиусом a и полярным углом ψ, получим следующее выражение для распределения электрического поля в винтовой дуге:

$$E_r = \frac{E_{rm}}{1-K_m r\cos\theta}. \qquad (38)$$

Важной характеристикой криволинейных дуг является величина удлинения линий тока по сравнению с осесимметричным случаем. Не детализируя картины распределения тока в криволинейной дуге, примем в качестве удлинения дуги удлинение линии, проходящей через центры распределения тока в каждом сечении канала. Для радиус-вектора центра распределения тока по поперечному сечению разрядной камеры имеем

$$\vec{r}_j = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{R_w} E_r\,\sigma(r,\theta)\,\vec{r}\,r\,dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^{R_w} E_r\,\sigma(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta}, \qquad (39)$$

где E_r определяется выражением (38), $\sigma(r,\theta)$ - распределение электропроводности плазмы по сечению разрядной камеры. Определяя расстояние от оси канала до центра распределения тока

$$a_j = \sqrt{\vec{r}_m^{\,2} + \vec{r}_j^{\,2} - 2(\vec{r}_m\cdot\vec{r}_j)}, \qquad (40)$$

где $\vec{r}_m$ - радиус-вектор точки максимальной температуры, удлинение криволинейной дуги определим следующим выражением

$$\frac{\partial \ell_j}{\partial z} = \sqrt{1+(a'_{jz})^2 + K^2 a_j^2}. \qquad (41)$$

Аксиальная составляющая напряженности электрического поля, направленная вдоль оси канала, удовлетворяет закону Ома. С учетом соотношений (38)-(4I) можно получить

$$E_{rm} = \frac{I\sqrt{1+(a'_{jz})^2 + K^2 a_j^2}}{\int_0^{2\pi}\int_0^{R_w} \frac{\sigma(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta}{1-K_m r\cos\theta}}, \qquad (42)$$

где I - сила тока дуги.

Применим полученную формулу в наиболее простом случае бесконечно тонкой дуги, обладающей проводимостью G. В этом случае распределение электропроводности по сечению канала можно записать в виде $\sigma(\vec{r}) = G\,\delta(\vec{r})$, где $\delta(\vec{r})$ - δ - функция Дирака. Подставляя $\sigma(\vec{r})$ в выражение (42), получим

$$E_{rm} = \frac{I}{G}\frac{\partial \ell_j}{\partial z} = E_z\frac{\partial \ell_j}{\partial z}. \qquad (43)$$

Соотношение (43) выражает тот известный факт, что истинная напряженность электрического поля в криволинейной дуге (иногда ее называют технической напряженностью [17]) равна эффективной напряженности, определяемой распределением электропроводности по поперечному сечению разрядной камеры, умноженному на удельную длину токопроводящего канала дуги.

Определим среднюю напряженность электрического поля в криволинейной дуге с помощью соотношения

$$\langle E_g \rangle = \frac{1}{L_{\Gamma_*}} \oint \frac{E_{\tau m}\, d\gamma}{1 - K_m \tau \cos\theta}, \qquad (44)$$

где Γ_* – граница сечения проводящей зоны дуги, перпендикулярного оси разрядной камеры, $E_{\tau m}$ определяется из выражения (42). Проводя в (38) аппроксимацию первого рода и используя профиль (32) для каналовой модели дуги по вышеприведенным формулам, находим в случае винтовой дуги:

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_m| \left[1 + \frac{K^2 \bar{a}}{(1+K^2\bar{a}^2)}\, \gamma \cos(\theta + K\xi)\right], \qquad (45)$$

$$|\vec{E}_m| = \frac{\bar{I}\sqrt{1+K^2\bar{a}_d^2}}{U_m\left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{\frac{2}{n}}\left(\frac{n\bar{s}}{n+2}\right)\left[1+\frac{K^2\bar{a}^2}{(1+K^2\bar{a}^2)} \times \left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)\right]}, \qquad (46)$$

$$a_j = a\left\{\frac{1+\frac{K^2\left(\frac{1}{2}+2\bar{a}^2\right)}{2(1+K^2\bar{a}^2)} \times \left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{\frac{2}{n}}\left(\frac{n+2}{n+4}\right) - \left[1+\frac{K^2\bar{a}^2}{1+K^2\bar{a}^2}\right]\left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)}{1 - \frac{K^2\bar{a}^2}{(1+K^2\bar{a}^2)}\left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)}\right\}. \qquad (47)$$

Для вычисления средней напряженности электрического поля по формуле (44) в случае "толстых" дуг заменим интегрирование по границе проводящей зоны на интегрирование по границе канала

$$\langle |\vec{E}| \rangle = |\vec{E}_m|. \qquad (48)$$

7. РАСЧЕТ ТЕПЛОВЫХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВИНТОВОЙ ДУГИ

Для вычисления "укороченного действия" (13б) в случае прямой винтовой дуги примем для $U(\gamma,\theta)$ профиль (32), а для

$|\vec{E}|$ профиль (45). Поскольку профиль $|\vec{E}|$ (45) не содержит новых независимых параметров, при вычислении интеграла (13б) можно не учитывать последний член, в который электрическое поле входит как варьируемая функция. Используем также аппроксимацию первого рода для коэффициента при $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2$ в (13б)

$$\frac{1}{U+1+s} \approx \frac{1}{1+U_m}\left[1 + (1+U_m)\frac{\gamma^n}{\zeta_n}\right].$$

В результате получим:

$$L_{s\varepsilon}^{(\vec{\tau})} = |\overset{0}{E}_m|^2 \left[\frac{1}{4}\left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{\frac{2}{n}} U_m^2 \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2}\frac{K^2\bar{a}\cdot\bar{a}}{(1+K^2\bar{a}^2)} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{\frac{3}{n}} U_m^2 \frac{n^2}{(n+3)(2n+3)} + \frac{1}{8}\frac{K^4\bar{a}^2\left(\frac{1}{2}+2\bar{a}^2\right)}{(1+K^2\bar{a}^2)^2}\left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{\frac{4}{n}} \times$$

$$\left.\times U_m^2 \frac{n^2}{(n+4)(n+2)}\right] - \frac{n}{4}(1+U_m)^2(1+I_{\lambda\theta}) - \frac{n^2K^2}{4(n+1)} \times \qquad (49)$$

$$\times (1+U_m)^2 I_{\lambda\xi} + \frac{\tau_0}{2}\left\{\dot{a}^2\left[\frac{n^2(1+U_m)}{2(n+1)} + \frac{n^2(1+U_m)^2}{(3n+2)}\right] I_{\dot{a}} + \right.$$

$$+ \dot{n}^2\left[\frac{1+U_m}{4(n+1)^3} + \frac{(1+U_m)^2}{4(n+1)^3} + \frac{(1+U_m)^2}{(3n+2)^3}\right] + \dot{U}_m^2\left[\frac{n^2(1+U_m)}{2(n+2)(n+1)} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{n^2(1+U_m)^2}{(n+1)(n+2)(3n+2)}\right] + \dot{n}\dot{U}_m\left[\frac{n(4+3n)}{2(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{n(4+5n)(1+U_m)}{2(n+1)^2(3n+2)^2}\right]\right\},$$

где

$$I_{\lambda\xi} = \frac{1}{2}\bar{a}^2 + \bar{a}^4\left[\frac{1}{2(1+\sqrt{1-\bar{a}^2})} + \frac{\sqrt{1-\bar{a}^2}}{(1+\sqrt{1-\bar{a}^2})^2}\right], \qquad (50а)$$

$$I_{\dot{a}} = \frac{1}{2} + \bar{a}^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\bar{a}^2}} - \frac{2}{1+\sqrt{1-\bar{a}^2}} + \frac{\sqrt{1-\bar{a}^2}}{(1+\sqrt{1-\bar{a}^2})^2}\right]. \qquad (50б)$$

Подставляя выражение (49) в интеграл (13а) и варьируя полученный функционал по параметрам U_m, n, $\bar{a}$, считая величины с индексом „0" фиксированными, а затем, после окончания варьирования, убирая индексы "0" и переходя к пределу $\tau_0 \to 0$, получим следующую систему уравнений, определяющих динамику винтовой дуги. Для формпараметров распределения υ по сечению разрядной камеры получаем:

$$\upsilon_m = \frac{L^{(\vec{\varepsilon})'}_{SE,\upsilon}\, b_{22} - L^{(\vec{\varepsilon})'}_{SE,n}\, b_{12}}{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}, \tag{51а}$$

$$n = \frac{L^{(\vec{\varepsilon})'}_{SE,n}\, b_{11} - L^{(\vec{\varepsilon})'}_{SE,\upsilon}\, b_{12}}{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}, \tag{51б}$$

где

$$L^{(\vec{\varepsilon})'}_{SE,\upsilon} = |\vec{E}_m|^2 \Big\{ \frac{n^2 \upsilon_m}{2(n+1)(n+2)} \left(\frac{\upsilon_m}{1+\upsilon_m}\right)^{\frac{2}{n}} \left[1 + \frac{1}{n(1+\upsilon_m)}\right] -$$
$$- \frac{n^2 \upsilon_m}{2(n+3)(2n+3)} \left(\frac{\upsilon_m}{1+\upsilon_m}\right)^{\frac{3}{n}} \left[2 + \frac{3}{n(1+\upsilon_m)}\right] \frac{K^2 \bar{a}^2}{(1+K^2\bar{a}^2)} +$$
$$+ \frac{n^2 \upsilon_m}{4(n+4)(n+2)} \left(\frac{\upsilon_m}{1+\upsilon_m}\right)^{\frac{4}{n}} \left[1 + \frac{2}{n(1+\upsilon_m)}\right] \times \tag{52а}$$
$$\times \frac{K^4 \bar{a}^2}{(1+K^2\bar{a}^2)^2} \left(\frac{1}{2} + 2\bar{a}^2\right) \Big\} - \frac{n}{2}(1+\upsilon_m)(1+I_{\lambda\theta}) -$$
$$- \frac{K^2 n^2}{2(n+1)} (1+\upsilon_m) I_{\lambda\xi},$$

$$L^{(\vec{\varepsilon})'}_{SE,n} = |\vec{E}_m|^2 \Big\{ \frac{\upsilon_m^2}{4(n+1)^2(n+2)} \left(\frac{\upsilon_m}{1+\upsilon_m}\right)^{\frac{2}{n}} \Big[3n^2 + 4n +$$
$$+ 2(n+1)(n+2) \ln\left(\frac{1+\upsilon_m}{\upsilon_m}\right)\Big] - \frac{\upsilon_m^2}{2(n+3)^2(2n+3)^2} \left(\frac{\upsilon_m}{1+\upsilon_m}\right)^{\frac{3}{n}} \times$$
$$\times \left[n^3 + 12n^2 + 9n + 2(n+3)(2n+3) \ln\left(\frac{1+\upsilon_m}{\upsilon_m}\right)\right] \frac{K^2 \bar{a}^2}{(1+K^2\bar{a}^2)} +$$
$$+ \frac{\upsilon_m^2}{8(n+2)^2(n+4)^2} \left(\frac{\upsilon_m}{1+\upsilon_m}\right)^{\frac{4}{n}} \Big[6n^2 + 16n + 2(n+2)(n+4) \times \tag{52б}$$
$$\times \ln\left(\frac{1+\upsilon_m}{\upsilon_m}\right)\Big] \frac{K^4 \bar{a}^2}{(1+K^2\bar{a}^2)^2} \left(\frac{1}{2} + 2\bar{a}^2\right) \Big\} - \frac{1}{2}(1+\upsilon_m)^2 (1+I_{\lambda\theta}) -$$
$$- \frac{(n^2+2n)K^2}{4(n+1)^2} I_{\lambda\xi}.$$

$$b_{11} = \frac{n(4+3n)}{2(n+2)(n+1)} + \frac{n^2(1+\upsilon_m)^2}{(n+1)(n+2)(3n+2)},$$

$$b_{12} = \frac{n(4+3n)}{4(n+1)^2(n+2)^2} + \frac{n(4+5n)(1+\upsilon_m)}{4(n+1)^2(3n+2)^2},$$

$$b_{22} = \frac{1+\upsilon_m}{4(n+1)^3} + \frac{(1+\upsilon_m)^2}{(3n+2)^3}. \tag{52в}$$

Здесь $|\vec{E}_m|$ определяется по формуле (46).
Для определения скорости теплового скольжения винтовой дуги $V_{T.C.}$ следует варьировать функционал (13) по параметру $\bar{a}$ - радиусу винтовой изотермы максимальной температуры.
В результате получим

$$V_{T.C.} = \dot{\bar{a}}_\tau = V_{T.C.}^{(1)} + V_{T.C.}^{(\lambda)}, \tag{53}$$

где

$$V_{T.C.}^{(1)} = |\vec{E}|^2 \left\{ \frac{\frac{K^2\bar{a}}{(1+K^2\bar{a}^2)} \left(\frac{\upsilon_m}{1+\upsilon_m}\right)^{\frac{1}{n}} \upsilon_m^2 \frac{n^2}{(n+3)(2n+3)} + \frac{K^4\bar{a}^3}{(1+K^2\bar{a}^2)^2} \left(\frac{\upsilon_m}{1+\upsilon_m}\right)^{\frac{4}{n}} \upsilon_m^2 \frac{n^2}{(n+4)(n+2)}}{2\left[\frac{n^2(1+\upsilon_m)}{2(n+1)} + \frac{n^2(1+\upsilon_m)^2}{(3n+2)}\right] I_i} \right\}, \tag{54}$$

$$V_{Tc}^{(2)} = -n(1+U_m)\left\{\frac{\frac{nK^2}{(n+1)}\frac{dI_{2s}}{d\bar{a}} + \frac{dI_{2\theta}}{da}}{4\left[\frac{n^2}{2(n+1)} + \frac{n^2(1+U_m)}{(3n+2)}\right] I_{\bar{a}}}\right\} \quad (55)$$

Величины $V_{Tc}^{(1)}$ и $V_{Tc}^{(2)}$ в (53) представляют вклад в скорость теплового скольжения дуги соответственно от неоднородности джоулева тепловыделения и неоднородности теплоотвода в деформированной дуге.

В линейном по $\bar{a}$ приближении для скорости теплового скольжения получаем

$$V_{Tc} = -\bar{I}\bar{E}_0\left\{\frac{1 + K^2\left[\frac{n}{2(n+1)}\left(\frac{U_m}{1+U_m}\right)^{1} U_m \frac{n(n+2)}{\pi(n+3)(2n+3)}\right]}{\frac{n^2}{2(n+1)} + \frac{n^2(1+U_m)}{(3n+2)}}\right\} \quad (56)$$

Решая систему уравнений (I),(5Ia,б), где термическая скорость изотермы максимальной температуры выражается из уравнения (53), можно рассчитать тепловые и электрические характеристики равновесной винтовой дуги с заданным шагом. При этом, в соответствии с уравнением (53),скорость теплового скольжения изотермы максимальной температуры будет равна взятой с обратным знаком массовой скорости.

Результаты расчета приведены на рис.2-4. Видно, что напряженность поля в ближайшей к стенке канала точке сечения проводящей зоны возрастает как с ростом радиуса винтовой изотермы максимальной температуры, так и с уменьшением шага винта. Причем, вначале напряженность электрического поля возрастает быстрее, чем длина изотермы максимальной температуры, а затем достигает насыщения. Этот результат хорошо согласуется с экспериментальными результатами [18] . С другой стороны,средняя напряженность электрического поля (48) при этом уменьшается. Радиус проводящей зоны несколько уменьшается с ростом K и $\bar{a}$, максимальное значение $U \cdot U_m$ возрастает, что также имеет место лишь при небольших значениях тока $\bar{I}$. Зависимость

величины скорости теплового скольжения от отклонения оси дуги от оси канала согласуется с результатами расчета и эксперимента [20] .

8. ДУГА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим, следуя [15,16],равновесную форму дугового столба в бесконечном цилиндрическом канале в продольном магнитном поле в пренебрежении собственным магнитным полем дуги. Как известно, в этом случае дуга может принимать две равновесные формы: прямой шнур, расположенный на оси канала и винт с осью, совпадающей с осью канала. Винтовая форма дуги появляется в результате конвекции плазмы токопроводящего канала дуги, вызванной объемной силой Лоренца, которая возникает при взаимодействии внешнего продольного магнитного поля с азимутальной составляющей тока дуги.

Рассмотрим отдельную конвективную ячейку длиной $\ell \ll \lambda_g$ [19] . Внутри такой ячейки можно пренебречь кривизной столба дуги одновременно учитывая поперечную к оси дуги объемную силу Лоренца $F_\Lambda = \vec{j} \times \vec{B}$. Тогда скорость конвективного переноса столба дуги можно приближенно определить, исходя из решения [9,20] задачи о распределении скоростей в дуге,омещенной параллельно оси канала поперечным магнитным полем.Для винта поперечная сила Лоренца приблизительно равна $F \cong IB\frac{K\bar{a}_g}{\sqrt{1+K^2\bar{a}_g^2}}$. Тогда выражение для МГД-скорости при $\bar{a}_g \ll 1$ принимает вид:

$$V_{МГД} = \frac{IBK\bar{a}_g}{8\pi\mu\sqrt{1+K^2\bar{a}_g^2}}\left[\frac{r_0^2}{(1-\bar{a}_g^2)^2}\ln\frac{r_0^2}{(1-\bar{a}_g^2)^2} - 1\right], \quad (57)$$

где μ - вязкость газа.

Выбирая в качестве оси винтовой дуги изотерму максимальной температуры и приравнивая МГД-скорость к скорости термического скольжения (56), после простых преобразований,получим следующее уравнение, определяющее равновесную форму винтовой дуги вблизи границы устойчивости

$$\left[\frac{(S_w h_w)\, I B R_w \left(\frac{d\ln h}{d\ln S}\right)_p}{8\pi_m (S_* - S_w)}\right] = \Phi(K, \bar{L}, U_m, n, \rho_{o*}) \qquad (58)$$

где $\bar{L}_1 = \bar{I}\cdot\bar{E}_{zo}$ – нормированная удельная мощность прямой дуги,

$$\Phi(K, \bar{L}, U_m, n, \rho_{o*})_{\bar{a}\to 0} = \frac{1}{2}\bar{L}\left\{\frac{1 + K^2\left[\frac{n}{n+1} - U_m \rho_{o*} \frac{n(n+2)}{\pi(3+n)(2n+3)}\right]}{\left[\frac{n^2}{2(n+1)} + \frac{n^2(1+U_m)}{(3n+2)}\right](\rho_{o*}^2 - 2\ln\rho_{o*} - 1)K}\right\} \qquad (59)$$

Значение $K = K_m$, при котором функция $\Phi(K, \bar{L}, U_m, n, \rho_{o*})$ принимает минимальное значение, определяет волновое число винтовой дуги вблизи границы устойчивости. Решая уравнение $\left.\frac{d\Phi}{dK}\right|_{K=K_m} = 0$, находим

$$K_m = \sqrt{\frac{1}{\frac{n}{n+1} - \rho_{o*}^{n+1}\bar{L}\frac{2n(n+2)}{\pi(n+3)(2n+3)}}}. \qquad (60)$$

Используя данные [6] для $\rho_{o*} = 0{,}5$, $\bar{I} = 0{,}3$, $\bar{E} = 13{,}72$, $U_m = 0{,}82$, $n = 0{,}5$ получим по формуле (60) $K_m \cong 1{,}6$, что хорошо согласуется с экспериментальными данными и теоретическим расчетом [16,18]. Из соотношения (60) также следует, что с ростом нормированной мощности $\bar{L}$ шаг винта увеличивается.

Для более точного определения геометрических параметров винтовой дуги в выражении (57) следует положить $a_g = a_j$, где a_j определяется из (47) и учесть наклон конвективной ячейки по отношению к поперечному сечению разрядной камеры. При этом выражение (59) принимает вид

$$\Phi = \frac{V_{Tc}^{(1)} + V_{Tc}^{(2)}}{\frac{Ka_j}{\sqrt{1+K^2a_j^2}}\left[\frac{\rho_{o*}^2}{(1+K^2a^2)(1-a_j^2)^2}\ln\frac{\rho_{o*}^2}{(1+K^2a^2)(1-a_j^2)^2} - 1\right]}, \qquad (61)$$

где $V_{Tc}^{(1)}$ и $V_{Tc}^{(2)}$ определяются из выражений (54),(55). Расчет шага винта по формуле (61) показал, что в широких пределах изменения отклонения изотермы максимальной температуры от оси канала $\bar{a}$, приведенной мощности $\bar{L}$ и радиуса проводящей зоны ρ_{o*} шаг винта изменяется незначительно и лежит в пределах 2 ÷ 3 D_{us} (Рис.5,6).

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное выше исследование характеристик электрических дуг сложной формы базировалось на использовании лагранжева вариационного принципа. Для реализации прямых методов решения вариационной задачи использовались наиболее простые пробные функции, благодаря чему удалось получить аналитические решения удовлетворительно согласующиеся как с экспериментальными результатами, так и расчетами, основанными на более простых моделях.

При использовании более точных пробных функций, либо при необходимости учитывать нелинейные зависимости свойств плазмы решение задач вариационным методом может быть реализовано на ЭВМ. Однако уже сейчас есть основания считать, что выводы о распределении электрического поля, температуры, степени контракции и геометрических параметров криволинейных дуг, сделанные при исследовании данной модели, сохранят свое качественное значение и в более точных моделях, претерпевая только определенные количественные изменения.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Б.А.Урюкову и канд.техн.наук Е.П.Пахомову за оказанную помощь в постановке задачи и обсуждении результатов.

ЛИТЕРАТУРА

I. Жуков М.Ф., Смоляков В.Я., Урюков Б.А. Электродуговые нагреватели газа (плазмотроны). М., "Наука", 1973, 232 с.

2. Меккер Г. Причины движения и смещения дуги. ТИИЭР, 1971, 59, № 4, с.4-15.

3. Шехтер Р.С. Вариационный метод в инженерных расчетах. М., "Мир", 1971, 291 с.

4. Vinjanovic B. An Approach to Linear and Non-linear Heat Transfer Problems using a Lagrangian. AIAAJ, 1971, 9, I, p.131-137.

5. Messerly H.K., Lee H.E. The Variational Method Applied to the Energy Balance Equations of DC and Free Recovery Arcs. "Elec.Eng.Trans.Inst.Eng.Austral", 1974, 10, 2, p.103-108.

6. Гороховский В.И. Вариационные методы в динамике термической плазмы. Изв.СО АН СССР. Сер.техн.наук, 1979, вып.I, № 3 (в печати).

7. Rompe R., Weizel B. Über die Bedentung des Steenbeckschen Minimumprinzips. Zeitschrift für Physik, 1942, 120, 2, p.31-46

8. Seeger G. Zur Theorie der Strömung in Wandstabilisierten Bogen mit Quermagnetfeld. Z.Angew.Phys., 25, 1968, p.23-29.

9. Seeger G. Theorie der Strömungsfelder in Magnetish Ausgelenkten Wandstabilisierten Bögen. Z.Angew.Phys., 29, 1970, p.357-364.

10. Менжел Ю. Магнитная неустойчивость электрической дуги. В кн.: "Теория электрической дуги в условиях вынужденного теплообмена". Новосибирск., "Наука", 1977, с.182-205.

II. Асиновский Э.И., Афанасьев А.А., Пахомов Е.П. Исследование характеристик стабилизированной стенкой дуги высокого давления в продольном магнитном поле. ДАН СССР, 1976, 231, № 2, с.826-829.

12. Steinberger S. Messung von Temperaturverteilungen im H_2 - Kaskadenbogen bis 27000°K. Zeitschrift für Physik, 1969, 223, p.1-18.

13. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., "Наука", 1963, 716 с.

14. Андерсон Дж.А. Явления переноса в термической плазме. М., "Энергия", 1972, 151.

15. Ragaller K. Investigations on Instabilities of Electric Arcs. Z.Naturforsch. 1974, 29a, p.556-567.

16. Афанасьев А.А., Пахомов Е.П., Сычев П.Е. Модель винтовой формы дуги. ТВТ. 1978, 16, № 2, с.247-257.

17. Урюков Б.А. Исследования турбулентных электрических дуг. Изв.СО АН СССР. Сер.техн.наук, 1975, вып.I, № 8, с.3-11.

18. Асиновский Э.П., Афанасьев А.А., Пахомов Е.П. Исследование характеристик стабилизированной стенкой дуги высокого давления в продольном магнитном поле. ТВТ, 1976, 14, № 4, с.695-701.

19. Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. Турбулентные процессы в тороидальных системах. В кн.: "Вопросы теории плазмы". М. Атомиздат, 1967, с.209-349.

20. Новиков О.Я., Танаев В.В. Скорость теплового прорастания дуги в цилиндрическом канале. В кн.: Тезисы докл. VII Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Алма-Ата, 1977, 2, с.35-38.

Рукопись поступила 15 декабря 1978 года

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис.I. Схема винтовой дуги.

Рис.2. Зависимость E/E ($\bar{a}$ =0) на ближайшей к стенке разрядной камеры стороне проводящего канала винтовой дуги (сплошная линия) и удлинения проводящего канала $\frac{\partial \ell}{\partial \bar{z}} = \sqrt{1+K^2 a_*^2}$ (пунктирная линия) от радиуса $\bar{a}$ винтовой изотермы максимальной температуры при $K=K_m$. 1 $-\bar{I}=1$; 2$-\bar{I}$=3; 3$-\bar{I}$=5; 4$-\bar{I}$=I0.

Рис.3. Зависимость V_m / V_m ($\bar{a}$ =0) (сплошная линия) эффективного радиуса винтовой дуги $r_g = \frac{r_*}{\sqrt{1+K^2 a_*^2}}$ (пунктирные линии) и формпараметра n (штрих-пунктирные линии) от волнового числа K при $\bar{a}$ =0,25. 1 $-\bar{I}=1$; 2$-\bar{I}$=3; 3$-\bar{I}$=5; 4$-\bar{I}$=I0.

Рис.4. Зависимость V_{rc} от $\bar{a}$. 1 $-\bar{I}=1$, K =0; 2$-\bar{I}=1$, $K=1$; 3$-\bar{I}=1$, K=2; 4$-\bar{I}=1$, K=3; 5$-\bar{I}$=3, K=0; 6$-\bar{I}$=5, K=0; 7$-\bar{I}$=I0, K=0.

Рис.5. Зависимость $\lambda_m = \frac{1}{K_m}$ от $\bar{a}$. 1$-\bar{I}=1$; 2$-\bar{I}$=3; 3$-\bar{I}$=5; 4$-\bar{I}$=I0.

Рис.6. Зависимость $\Phi(K, \bar{L}, V_m, n, r_{o*})$, определяемая уравнением (6I) от K . 1 $-\bar{I}$=0,3, $\bar{a} \to 0$; 2$-\bar{I}$=0,3; $\bar{a}$ =0,3; 3$-\bar{I}=1$, $\bar{a} \to 0$, 4$-\bar{I}=1$, $\bar{a}$ =0,3; 5$-\bar{I}$=3, $\bar{a} \to 0$; 6$-\bar{I}$=3, $\bar{a}$ =0,I; 7$-\bar{I}$=3, α =0,2; 8$-\bar{I}$=3, $\bar{a}$ =0,3.

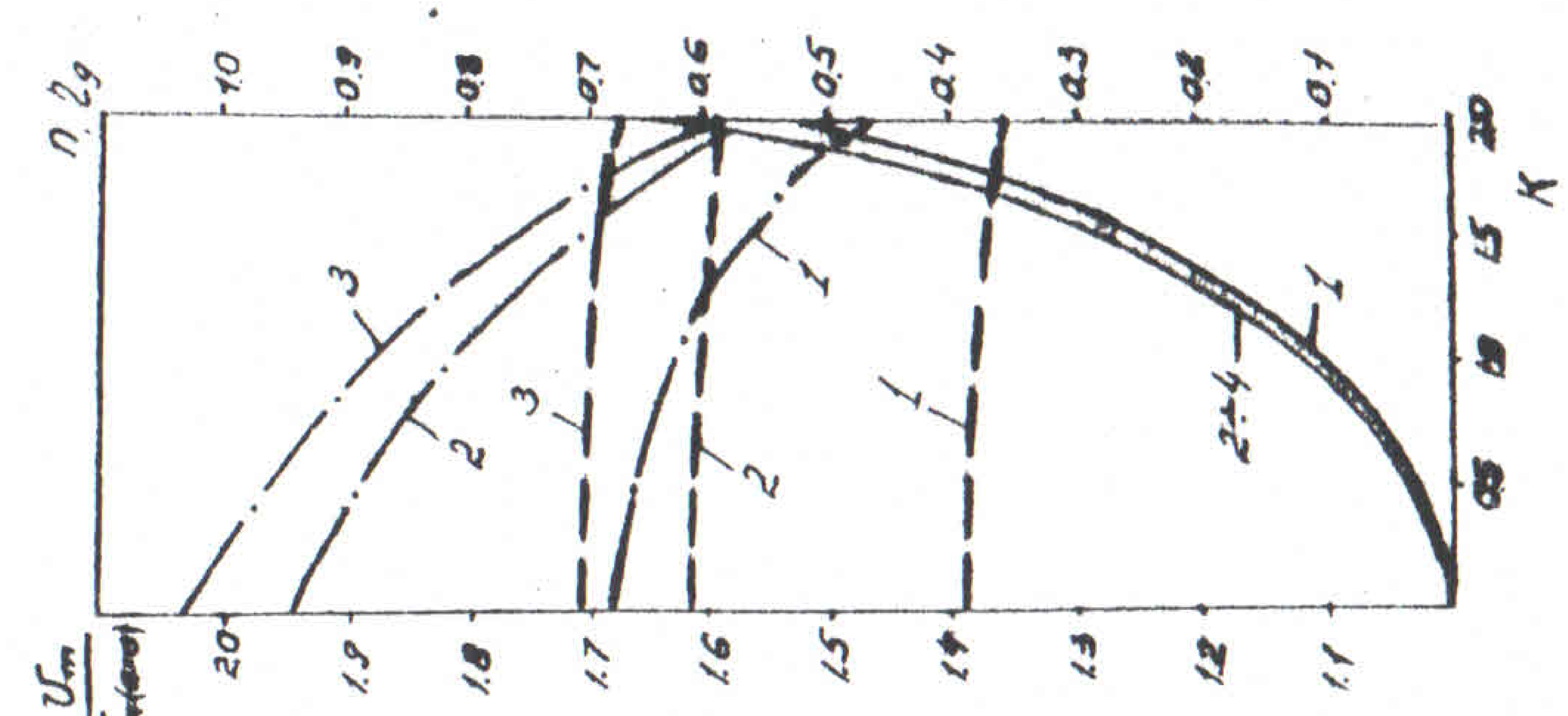

Рис.3.

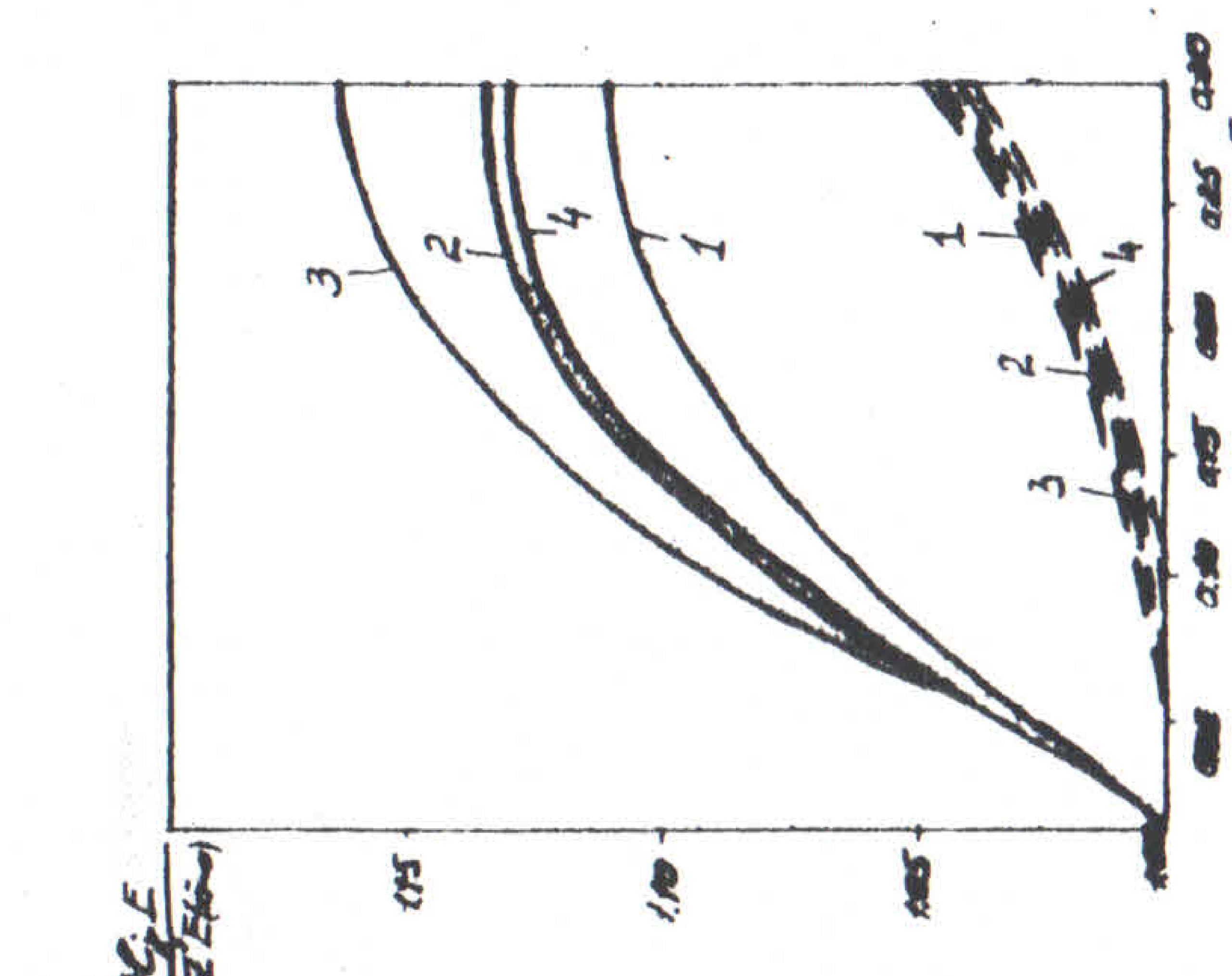

Рис.2.

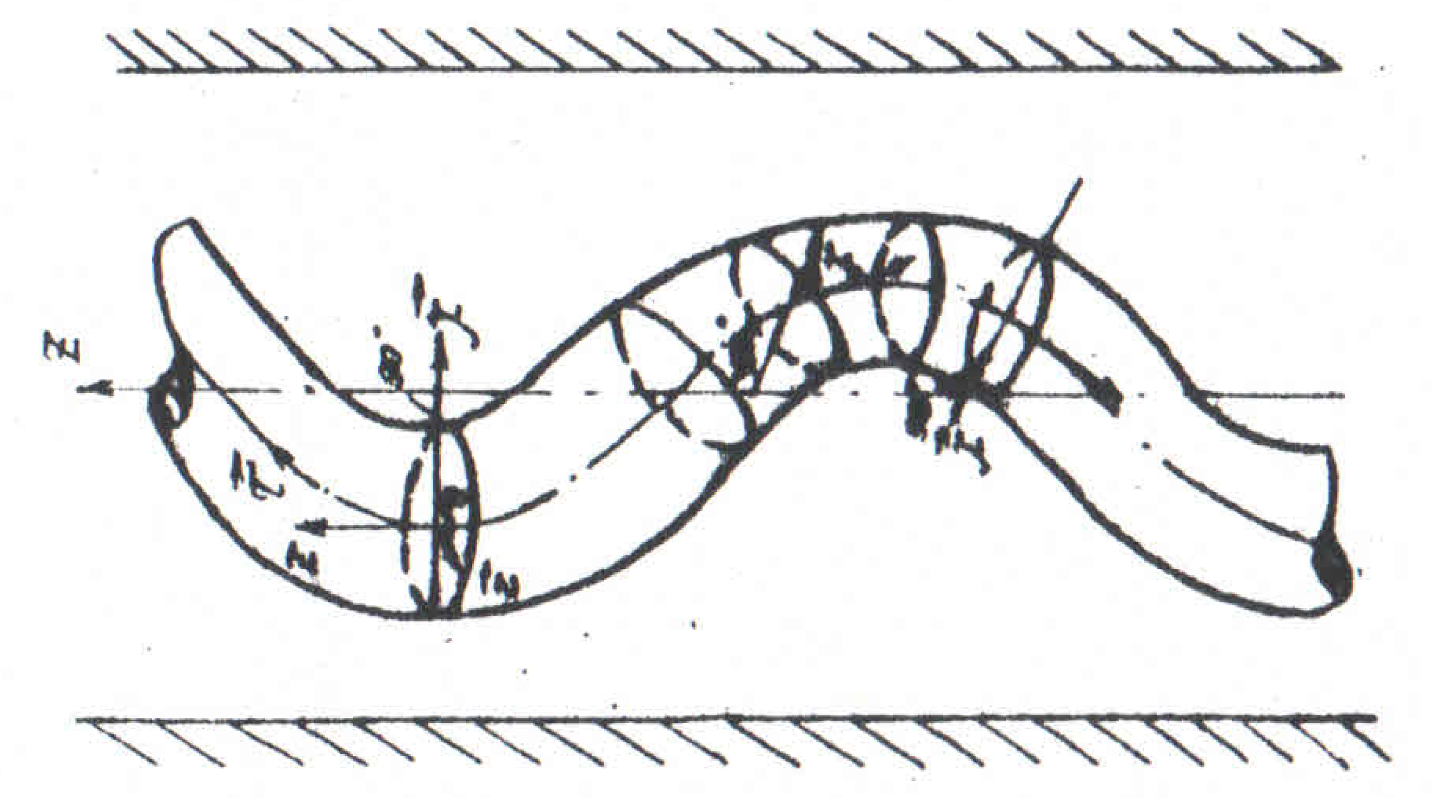

Рис.I.

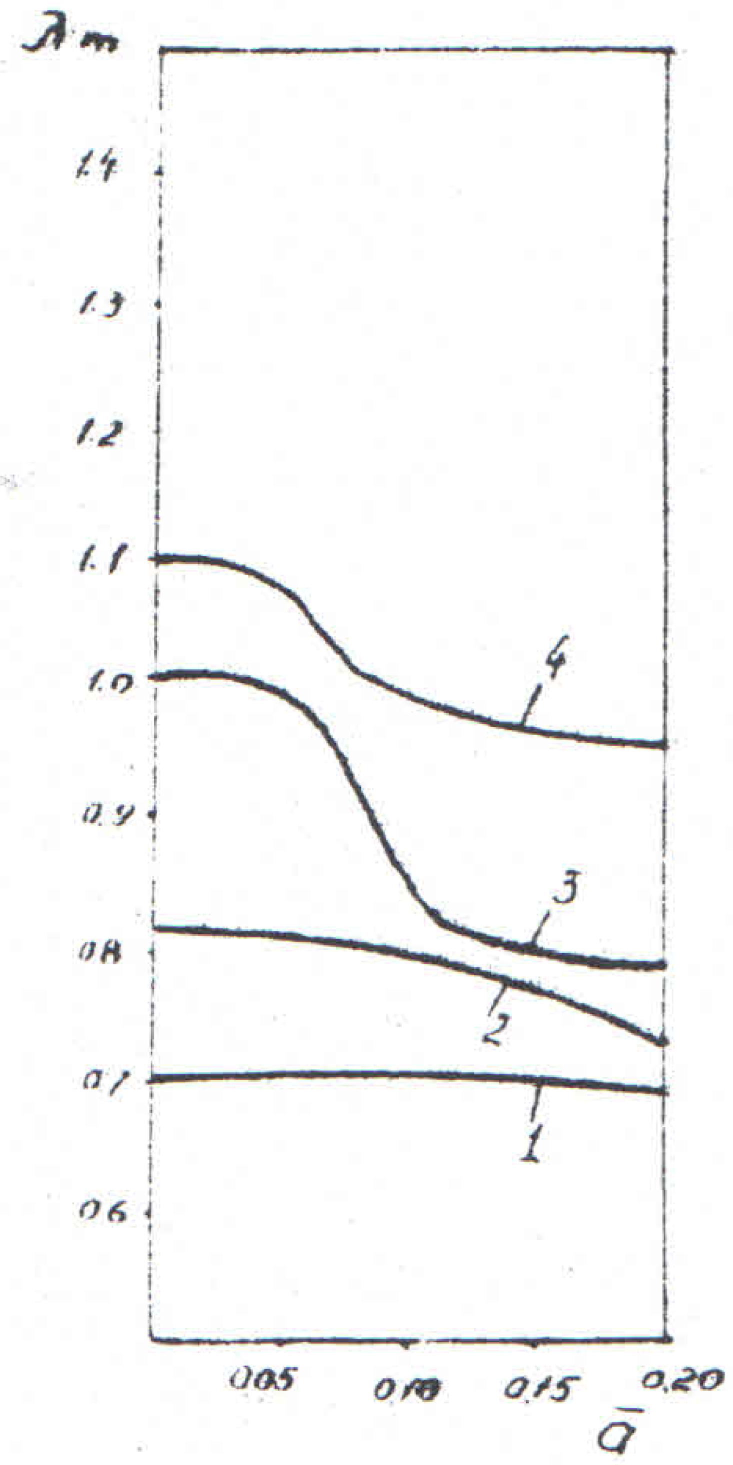

Рис.4.

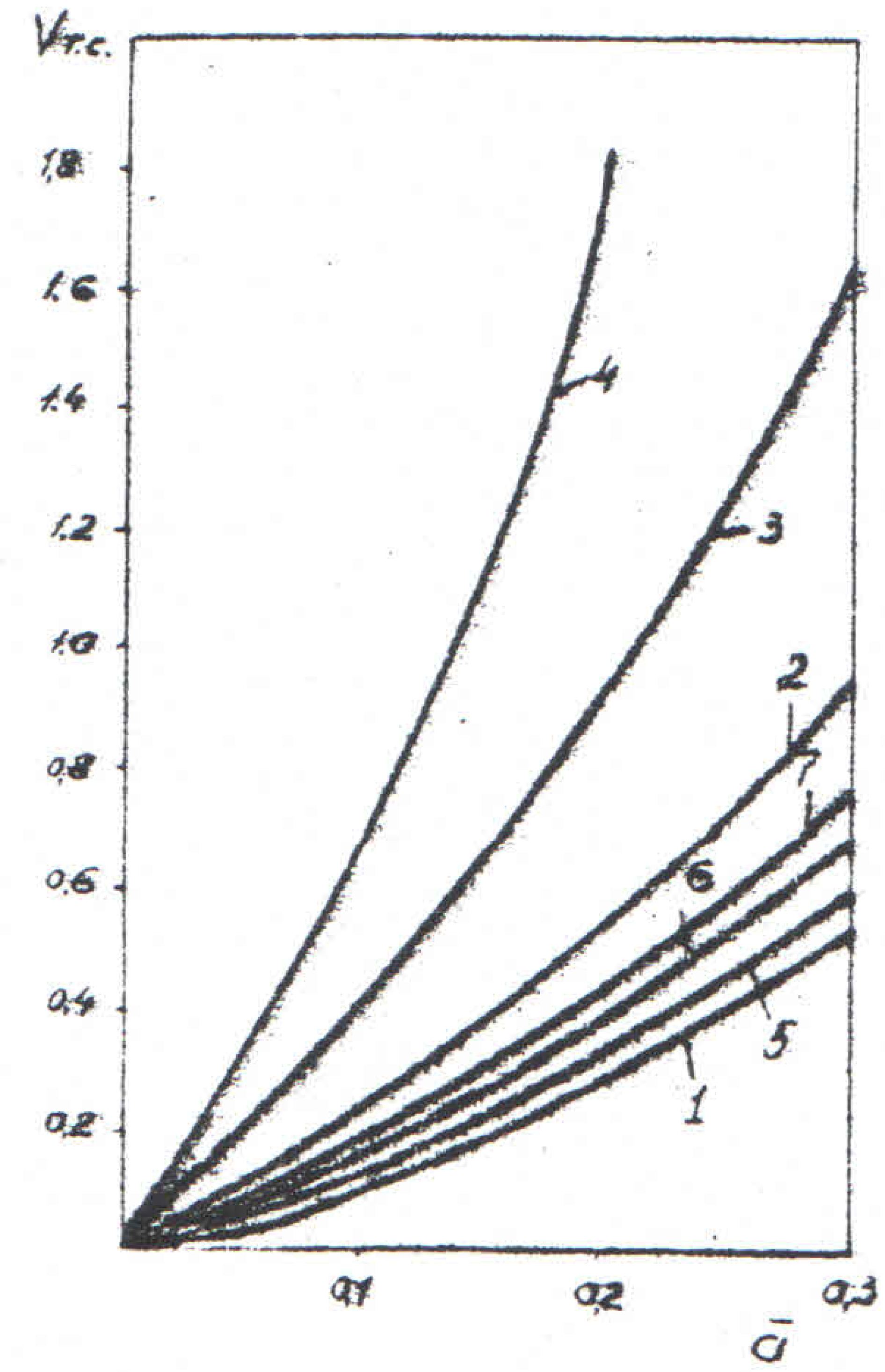

Рис.5.

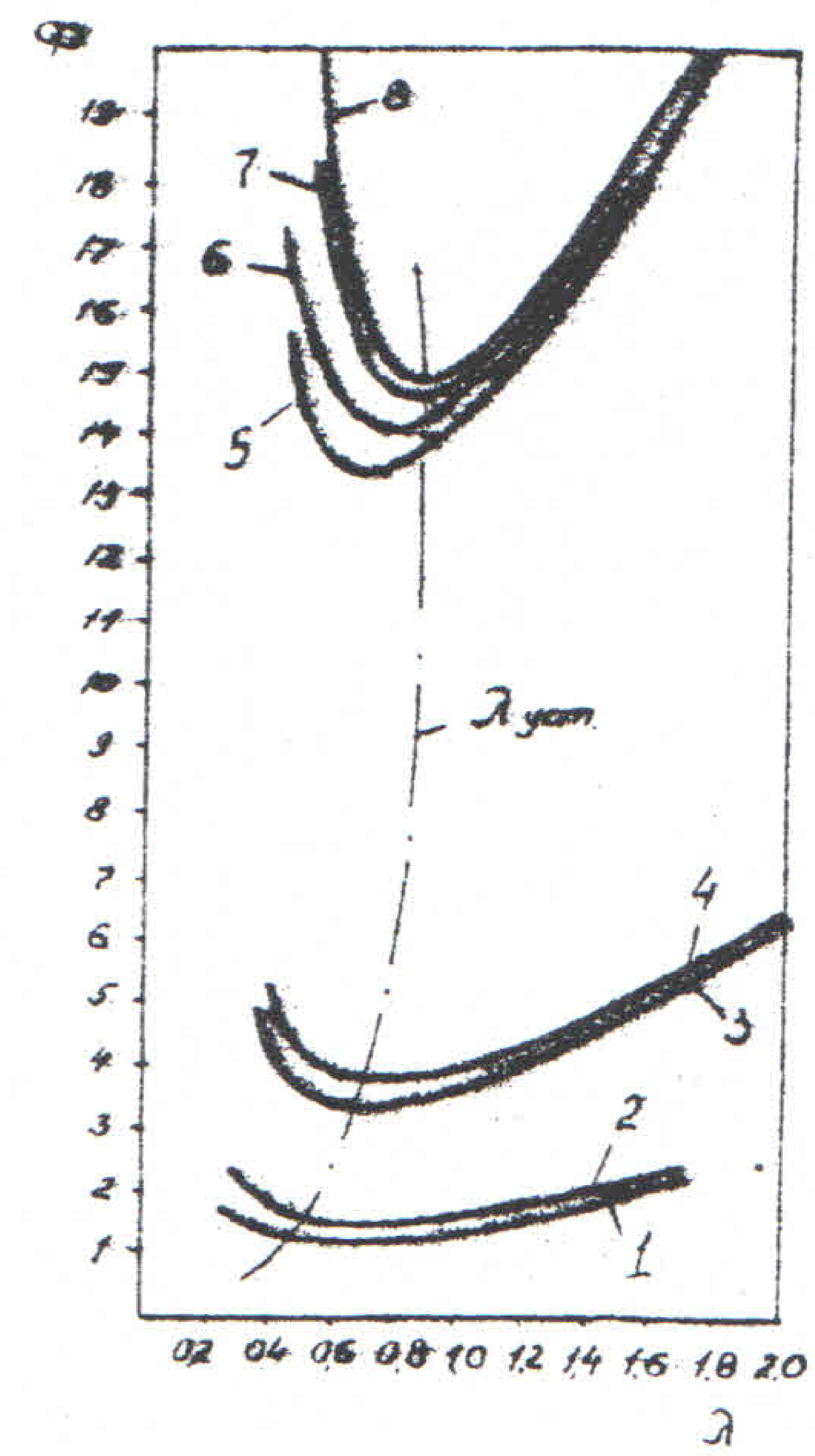

Рис.6.

Редактор А.И.Королева Техн.редактор Н.К.Хильчевская

БФ 02066 Зак.16 Формат 60х90/16 1,7 п.л.

Подписано к печати 10.1.1979 г. Тираж 295. Цена 13 коп.

Офсетная лаборатория Института теоретической физики АН УССР